$0 \leq u_n \leq f \leq v_n \leq M$ et $0 \leq \phi_n \leq g \leq \psi_n \leq M'$, avec

$$\lim_{n\to+\infty} I(v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} I(\psi_n - \phi_n) = 0.$$

Donc

$$u_n\phi_n \leq fg \leq v_n\psi_n,$$

et les fonctions $u_n\phi_n$ et $v_n\psi_n$ sont en escalier.

On a alors

$$0 \leq v_n\psi_n - v_n\phi_n = v_n(\psi_n - \phi_n) + \phi_n(v_n - u_n) \leq M(\psi_n - \phi_n) + M'(v_n - u_n),$$

et en utilisant la croissance et la linéarité de l'intégrale, on en déduit

$$0 \leq \int_a^b (v_n\psi_n - u_n\phi_n)(x)dx \leq M\int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)dx + M'\int_a^b (v_n - u_n)(x)dx.$$

Le théorème "des gendarmes" montre que la suite $\int_a^b (v_n\psi_n - u_n\phi_n)(x)dx$ converge vers 0, donc que fg est Riemann-intégrable.

Si maintenant f et g sont Riemann-intégrables de signes quelconques, les fonctions $f+$, $-f_-$, g_+, $-g_-$ sont Riemann-intégrables et positives, donc leurs produits aussi. Mais

$f = f_+ + f_-$ et $g = g_+ + g_-$,

donc

$$fg = f_+g_+ + f_+g_- + f_-g_+ + f_-g_-,$$

est Riemann-intégrable comme somme de fonctions Riemann-intégrables. ∎

On peut alors donner l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

2.63 Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur le segment $[a, b]$ et à valeurs réelles. On a :

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b f(x)^2dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b g(x)^2dx\right)^{1/2} \quad (*)$$

De plus, si les fonctions f et g sont colinéaires, il y a égalité dans $(*)$.

Démonstration: Les fonctions fg, f^2 et g^2 sont des produits de fonctions Riemann-intégrables donc sont Riemann- intégrable d'après ce qui précède.

Pour tout nombre réel λ, considérons l'expression

$$P(\lambda) = I((\lambda f + g)^2) = \int_a^b (\lambda f + g)^2(x)dx$$

C'est l'intégrale d'une fonction positive, donc $P(\lambda) \geq 0$.

En développant, et en utilisant la linéarité de I,

$$P(\lambda) = \lambda^2 I(f^2) + 2\lambda I(fg) + I(g^2).$$

Si $I(f^2) \neq 0$, le polynôme $P(\lambda)$ est un trinôme du second degré toujours positif, donc son discriminant est négatif, et

$$I(fg)^2 - I(f^2)I(g^2) \geq 0,$$

on en déduit que

$$|I(fg)| \leq I(f^2)^{1/2}I(g^2)^{1/2},$$

ce qui donne l'inégalité voulue.

Si $I(f^2) = 0$, alors, quel que soit λ,

$$2\lambda I(fg) \, + I(g^2) \geq 0,$$

(en passant à la limite, $\lambda \to +\infty$ puis $\lambda \to -\infty$), l'inégalité ne peut être préservée que si $I(fg) = 0$: dans ce cas on a égalité.

Si les fonctions f et g sont colinéaires, et si f n'est pas la fonction nulle, il existe λ_0 tel que $\lambda_0 f + g = 0$. Dans ce cas $P(\lambda_0) = I((\lambda_0 f + g)^2) = 0$ est toujours positif mais s'annule, ce qui signifie que son discriminant est nul. On a alors égalité dans l'inégalité de Schwarz.

2.3 Critères d'intégrabilités

2.3.1 Sommes de Darboux

Dans tout ce qui suit, on se donne une fonction $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ bornée sur un intervalle compact $[a,\ b]$.

Pour toute subdivision $\sigma = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_n = b\}$ de $[a,\ b]$, les nombres :

$$\begin{cases} m_k = \inf\limits_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} f(x) \\ M_k = \sup\limits_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} f(x) \end{cases}$$

existent, dans $\mathbb{R}$ $(0 \leq k \leq n-1)$, puisque f est bornée. On pose :

$$\begin{cases} D_-(f,\sigma) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k), \\ D_+(f,\sigma) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k). \end{cases}$$

$D_-(f,\sigma)$ est appelée la **somme de Darboux inférieure** de f pour la subdivision σ et $D_+(f,\sigma)$ la **somme de Darboux supérieure** de f pour la subdivision σ.
On a évidemment $D_-(f,\sigma) \leq D_+(f,\sigma)$ Notons que si φ et ψ sont les fonctions en escalier définies par :

$$\varphi(x) = m_k \ ; \ \psi(x) = M_k \text{ si, } x \in]x_k,\ x_{k+1}[,\ 0 \leq k \leq n-1;$$

et $\varphi(x_n) = \psi(x_n) = f(x_n)$, alors $\varphi \leq f \leq \psi$ et

$$\begin{cases} I(\varphi) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) = D_+(f,\sigma) \\ I(\psi) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) = D_+(f,\sigma). \end{cases}$$

On a donc encadré f par deux fonctions en escalier φ et ψ, auxquelles on sait associer une intégrale. Le problème est donc de savoir quand on peut rendre la différence $I_\psi - I_\varphi$ aussi petite que l'on veut, ce qui permettra de définir l'intégrale de f. Intuitivement, ce va être possible si et seulement si f "n'oscille" pas trop.

2.65 REMARQUE

1) Si $\sigma \subset \sigma'$ i.e. σ' est plus fine que σ, alors :

$$D_-(f,\sigma) \leq D_-(f,\sigma') \leq D_+(f,\sigma') \leq D_+(f,\sigma)$$

Autrement dit, les sommes de Darboux inférieures croissent (lorsque l'on raffine les subdivisions) et les sommes de Darboux supérieures décroissent.

2) Pour toute subdivision $\sigma = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_n = b\}$ de $[a,\ b]$, et tout n-uplet $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ tel que $\xi_k \in [x_k,\ x_{k+1}]$, $0 \le k \le n-1$, on a

$$D_-(f,\sigma) \le S(f,\sigma,\xi) \le D_+(f,\sigma)$$

où $S(f,\sigma,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$ est la somme de Riemann associée à f, σ et ξ.

On va maintenant donner d'autres critères d'intégrabilités, qui entre autres montre que l'intégrale d'une fonction Riemann-intégrable peut s'obtenir comme la limite d'une somme de Riemann (comme pour les fonctions continues ou monotones).

2.66 THÉORÈME (CRITÈRES D'INTÉGRABILITÉ)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Les conditions suivantes sont équivalentes :

I) f est Riemann intégrable sur $[a,b]$.

II) Pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver un nombre $\delta > 0$, pour lequel on a : pour toute subdivision $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ de $[a,b]$ de pas inférieure à δ et tout n-uplet $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ tel que $\xi_k \in [x_k,\ x_{k+1}]$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, la somme de Riemann associée $S(f,\sigma,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$ vérifie

$$|I(f) - S(f,\sigma,\xi)| \le \epsilon.$$

III) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une subdivision σ de $[a,b]$ telle que

$$0 \le D_+(f,\sigma) - D_-(f,\sigma) \le \epsilon.$$

Démonstration: .
$I) \implies II)$ Soit $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Soit $\epsilon > 0$. Soient u_ϵ et v_ϵ des fonctions en escalier telles que $u_\epsilon \le f \le v_\epsilon \le M$ et $\int_a^b (v_\epsilon - u_\epsilon) \le \frac{e}{2}$. En aura aussi $\int_a^b u_\epsilon \le I(f) \le \int_a^b v_\epsilon$. Soit $\sigma_\epsilon = \{a = x_0 < x'_1 < \cdots < x'_{p-1} < x'_p = b\}$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à u_ϵ et v_ϵ. On note par $\delta_0 = \max_{i\in\{0,\ldots,n-1\}} x'_{i+1} - x'_i$ le pas de σ_ϵ. On pose $\delta = \min\left(\delta_0, \frac{\epsilon}{1+8M(p+1)}\right)$.

Soit $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$ de pas inférieure à δ et $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ tel que $\xi_k \in [x_k,\ x_{k+1}]$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

On pose $A = \{k \in \{0, \ldots, n-1\},\ \{x_k, x_{k+1}\} \cap \sigma_\epsilon = \emptyset\}$ et $B = \{0, \ldots, p-1\} \setminus A$.

Pour $k \in A$, $[x_k, x_{k+1}] \subset]x_i, x_{i+1}[$ pour un certain $i \in \{0, \ldots, p-1\}$, on aura alors $\int_{x_k}^{x_{k+1}} u_\epsilon \le f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \le \int_{x_k}^{x_{k+1}} v_\epsilon$

$$\left| f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \right| \le \int_{x_k}^{x_{k+1}} (v_\epsilon - u_\epsilon)$$

et par suite en prenant la somme sur $k \in A$ on aura

$$\left| \sum_{k\in A} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - \sum_{k\in A} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \right| \le \sum_{k\in A} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (v_\epsilon - u_\epsilon) \le \int_a^b (v_\epsilon - u_\epsilon) \le \frac{\epsilon}{2}.$$

Pour $k \in B$, on a que $|f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)| \leq \delta M$ d'où

$$\left| f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \right| \leq 2\delta M$$

par suite

$$\left| \sum_{k\in B} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - \sum_{k\in B} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \right| \leq 2\delta M.Card(B)$$

où $Card(B)$ est le cardinal de B.

On remarque qu'un élément $p \in \{0, \ldots, p\}$ appartient à au plus 2 intervalles $[x_k, x_{k+1}]$, avec $k \in B$, $Card(B) \leq 2(p+1)$, ainsi

$$\left| \sum_{k\in B} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - \sum_{k\in B} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \right| \leq 4\delta M(p+1) \leq \frac{4M(p+1)\epsilon}{1 + 8M(p+1)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Finalement, par l'inégalité triangulaire on aura

$$|S(f,\sigma,\xi) - I(f)| \leq \left| \sum_{k\in A} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - \sum_{k\in A} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \right| + \left| \sum_{k\in B} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - \sum_{k\in B} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \right| < \epsilon$$

ce qui termine la preuve de $I) \implies II)$. $II) \implies III)$ Supposons que l'on ait la convergence des sommes de Riemann du type précédent. Si l'on se donne $\epsilon > 0$, il existe une subdivision $\sigma = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_n = b\}$ de $[a,\ b]$, telle que, quel que soit le n-uplet $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ tels que $\xi_k \in [x_k,\ x_{k+1}]$, $0 \leq k \leq n-1$,

$$|I - S(f,\sigma,\xi)| \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

D'après la propriété de la borne supérieure, il existe ξ'_k dans $[x_k,\ x_{k+1}]$ tel que

$$M_k - \frac{\epsilon}{4(b-a)} \leq f(\xi'_k) \leq M_k.$$

Multiplions par $x_{k+1} - x_k$ et sommons les différentes inégalités. On obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\epsilon}{4(b-a)}(x_{k+1} - x_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi'_k)(x_{k+1} - x_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k),$$

ce qui donne

$$D_+(f,\sigma) - \frac{\epsilon}{4} \leq S(f,\sigma,\xi') \leq D_+(f,\sigma).$$

Si l'on prend $\xi' = (\xi'_0, \ldots, \xi'_{n-1})$, on a aussi

$$|I - S(f,\sigma,\xi')| \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

Alors

$$|I - D_+(f,\sigma)| \leq |I - S(f,\sigma,\xi')| + |S(f,\sigma,\xi') - D_+(f,\sigma)| \leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Le même calcul avec la borne inférieure, va donner également l'existence de ξ''_k dans $[x_k,\ x_{k+1}]$ tel que

$$m_k \leq f(\xi''_k) \leq m_k + \frac{\epsilon}{4(b-a)}.$$

Multiplions par $x_{k+1} - x_k$ et sommons les différentes inégalités. On obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi''_k)(x_{k+1} - x_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\epsilon}{4(b-a)}(x_{k+1} - x_k),$$

ce qui donne
$$D_-(f,\sigma) \le S(f,\sigma,\xi'') \le D_-(f,\sigma) + \frac{\epsilon}{4}.$$
Si l'on prend $\xi'' = (\xi''_0, \dots, \xi''_{n-1})$, on a aussi
$$|I - S(f,\sigma,\xi'')| \le \frac{\epsilon}{4}.$$
Alors
$$|I - D_-(f,\sigma)| \le |I - S(f,\sigma,\xi'')| + |S(f,\sigma,\xi'') - D_-(f,\sigma)| \le \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}.$$
Ainsi
$$0 \le D_+(f,\sigma) - D_-(f,\sigma) \le |D_+(f,\sigma) - I| + |I - D_-(f,\sigma)| \le \epsilon,$$
ce qui, d'après le critère des sommes de Darboux, montre que f est Riemann-intégrable. De plus puisque
$$D_-(f,\sigma) \le I(f) \le D_+(f,\sigma).$$
On obtient
$$D_-(f,\sigma) - I \le I(f) - I \le D_+(f,\sigma) - I,$$
d'où, pour tout $\epsilon > 0$,
$$|I(f) - I| \le \max(|D_+(f,\sigma) - I|,\ |D_-(f,\sigma)) - I|) \le \frac{\epsilon}{2},$$
et l'on en déduit que $I = I(f)$.

$III) \implies I)$ Soit $\epsilon > 0$ et σ une subdivision de $[a,b]$ tels que
$$0 \le D_+(f,\sigma) - D_-(f,\sigma) \le \epsilon.$$
Notons que si φ_ϵ et ψ_ϵ sont les fonctions en escalier définies par :
$$\varphi_\epsilon(x) = m_k \ ;\ \psi_\epsilon(x) = M_k \text{ si, } x \in]x_k,\ x_{k+1}[,\ 0 \le k \le n-1;$$
et $\varphi_\epsilon(x_n) = \psi_\epsilon(x_n) = f(x_n)$, alors $\varphi_\epsilon \le f \le \psi_\epsilon$ et
$$I(\psi_\epsilon - \varphi_\epsilon) = D_+(f,\sigma) - D_-(f,\sigma) < \epsilon$$
d'où f est Riemann-intégrable. ■

2.68 EXEMPLE. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ (la fonction de Dirichlet) définie par :
$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$
Comme les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que tout intervalle réel $]x,\ x'[$ avec $x < x'$ contient au moins un nombre rationnel et au moins un nombre irrationnel, il est immédiat que pour toute subdivision σ on a alors $D_-(f,\sigma) = 0$ et $D_+(f,\sigma) = 1$, le critère III) du théorème 2.66 n'est pas satisfait ; donc f n'est pas Riemann-intégrable.

2.4 Primitives

Soient a et b des réels, avec $a < b$, soit $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ une application. Une primitive de f sur $[a,b]$ est une fonction dérivable $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $F' = f$. Si G est une autre primitive de f sur $[a,b]$, alors $(G-F)' = G' - F' = 0$, $G - F$ est constante sur $[a,\ b]$. Donc, toute autre primitive de f sur $[a,b]$ est de la forme $F + c$, c est une constante.

Pour une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, la fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive,

Deux questions se posent :

Une primitive de f existe-t-elle toujours ?

Comment généraliser cette notion pour d'autres classes de fonctions que les fonctions continues ?

Comme condition nécessaire pour l'existence de primitive, on a le fameux résultat de G. Darboux sur les fonctions dérivées :

2.69 THÉORÈME

Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors F' vérifie *la propriété des valeurs intermédiaires (PVI)*, i.e. l'image de tout intervalle $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, $F'([\alpha,\beta])$, est un intervalle.

Démonstration: Soient α,β deux points de $[a,b]$ avec $\alpha < \beta$ et λ un réel compris entre $F'(\alpha)$ et $F'(\beta)$. On va montrer qu'il existe $c \in [\alpha,\beta]$ tel que $F'(c) = \lambda$. On peut, supposer que λ est différent de $F'(\alpha)$ et $F'(\beta)$, sinon il n'y a rien à faire. On définie $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = F(x) - \lambda$. φ est dérivable et $\varphi' = F' - \lambda$.
La fonction numérique φ est continue sur $[\alpha,\beta]$ elle est donc bornée et atteint ses bornes.

Supposons $F'(\alpha) < \lambda < F'(\beta)$. Alors comme $\varphi'(\alpha) = F'(\alpha) - \lambda < 0$, donc φ est décroissante au voisinage de α, donc φ n'atteint pas son minimum en α, de même $\varphi'(\beta) = F'(\beta) - \lambda > 0$, donc φ est croissante au voisinage de β, donc φ n'atteint pas son minimum en α, ainsi il existe $c \in]\alpha,\beta[$, dans ce cas $\varphi'(c) = 0$ donc $F'(\alpha) = \lambda$.

Si $F'(\beta) < \lambda < F'(\alpha)$, le même argument montre, en remplaçant minimum par maximum, qu'il existe $c \in]\alpha,\beta[$, dans ce cas $\varphi'(c) = 0$ donc $F'(\alpha) = \lambda$.
Ainsi, pour tout réel λ compris entre $F'(\alpha)$ et $F'(\beta)$, il existe $c \in [\alpha,\beta]$ tel que $F'(c) = \lambda$. ∎

2.71 COROLLAIRE

Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ admet une primitive sur $[a,b]$ si elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires (PVI).

2.72 EXEMPLE (EXEMPLES ET CONTRES-EXEMPLES). 1) Toute fonction continue sur $[a,b]$, vérifie la propriété des valeurs intermédiaire (PVI) et admet des primitive sur $[a,b]$.

2) Une fonction simple peut ne pas avoir de primitive : la fonction en escalier

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a pour image l'ensemble $\{0,1\}$ qui n'est pas un intervalle, elle ne vérifie alors pas la propriété des valeurs intermédiaire (PVI) et donc n'admet pas de primitive sur $[0,1]$.

3) Une fonction "compliquée" peut avoir des primitives : la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

a pour primitive sur $[0,1]$ la fonction

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On remarquera que f n'est pas continue en 0, mais elle est Riemann-intégrable, car elle est est bornée et continue sur $]0,1]$ (voir Proposition 2.56).

4) Un exemple de fonction vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires et qui n'admet pas de primitive, est obtenu en modifiant très légèrement la fonction précédente en posant :

$$g(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \in]0,1] \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

La fonction g ne peut admettre de primitive. Si on suppose que g, admet sur $[0,1]$ une primitive G, la fonction $G - F$ serait une primitive de $g - f$, ce qui ne peut pas être le cas puisque

$$(g-f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0,1] \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

ne vérifie pas la propriété des valeurs intermédiaires.

5) Une fonction non-intégrable au sens de Riemann peut avoir des primitives : la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

n'est pas bornée ($\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(\frac{1}{\sqrt{2k\pi}}\right) = -\infty$), mais elle a une primitive la fonction à savoir

$$F(x) = \begin{cases} F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$